

Chuyên đề 8:

LƯỢNG GIÁC

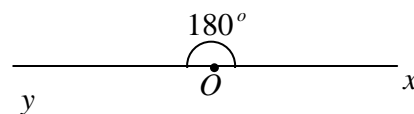
TÓM TẮT GIÁO KHOA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. Đơn vị đo góc và cung:

1. Độ:

$$\text{Góc } 1^0 = \frac{1}{180} \text{ góc bẹt}$$



2. Radian: (rad)

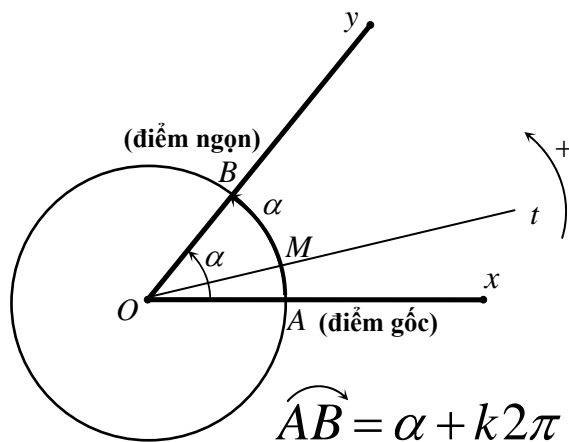
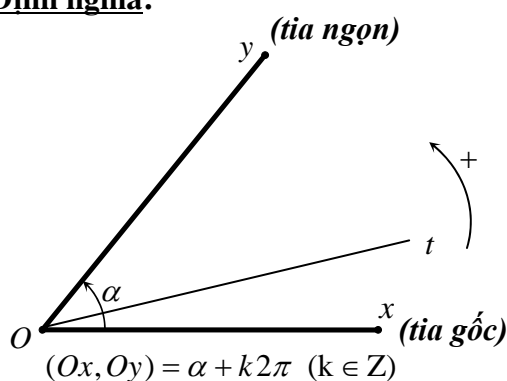
$$180^0 = \pi \text{ rad}$$

3. Bảng đổi độ sang rad và ngược lại của một số góc (cung) thông dụng:

Độ	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

II. Góc lượng giác & cung lượng giác:

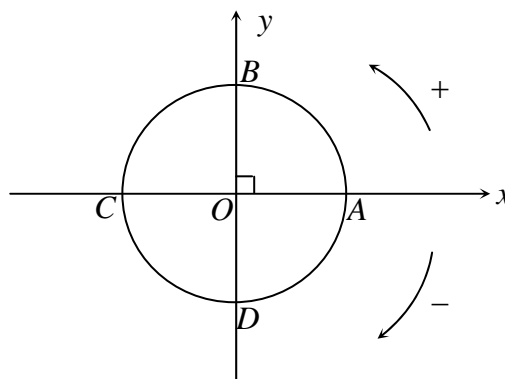
1. Định nghĩa:



2. Đường tròn lượng giác:

Số đo của một số cung lượng giác đặc biệt:

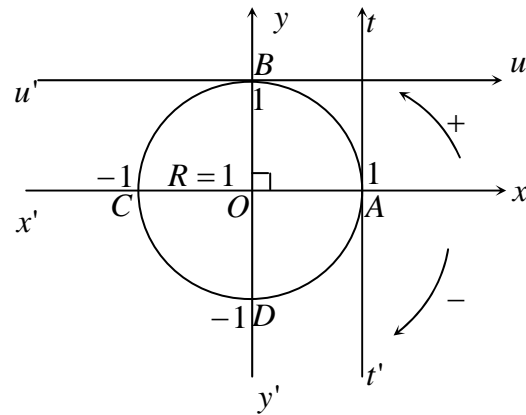
A	→	$2k\pi$
B	→	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
C	→	$\pi + 2k\pi$
D	→	$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
A, C	→	$k\pi$
B, D	→	$\frac{\pi}{2} + k\pi$



III. Định nghĩa hàm số lượng giác:

1. Đường tròn lượng giác:

- A: điểm gốc
- $x'Ox$: trục cosin (trục hoành)
- $y'Oy$: trục sin (trục tung)
- $t'At$: trục tang
- $u'Bu$: trục cotang



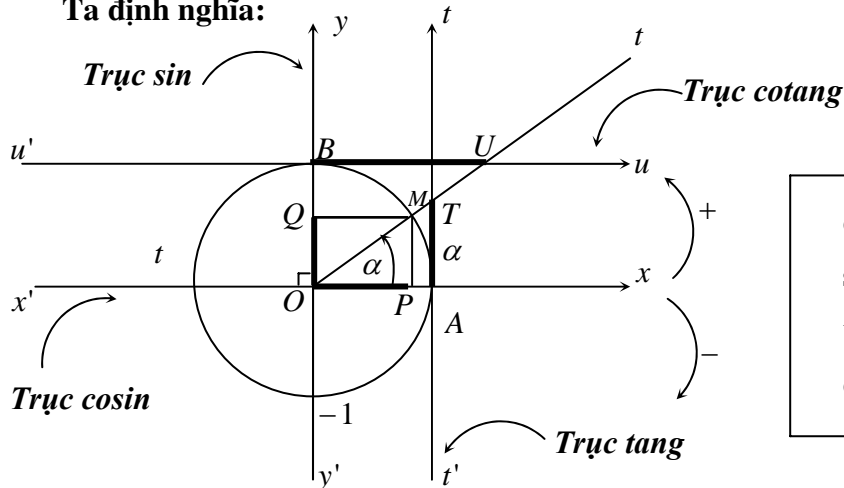
2. Định nghĩa các hàm số lượng giác:

a. **Định nghĩa:** Trên đường tròn lượng giác cho $AM = \alpha$.

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên $x'Ox$ và $y'Oy$

T, U lần lượt là giao điểm của tia OM với $t'At$ và $u'Bu$

Ta định nghĩa:



$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \overline{OP} \\ \sin \alpha &= \overline{OQ} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \overline{AT} \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \overline{BU}\end{aligned}$$

b. Các tính chất :

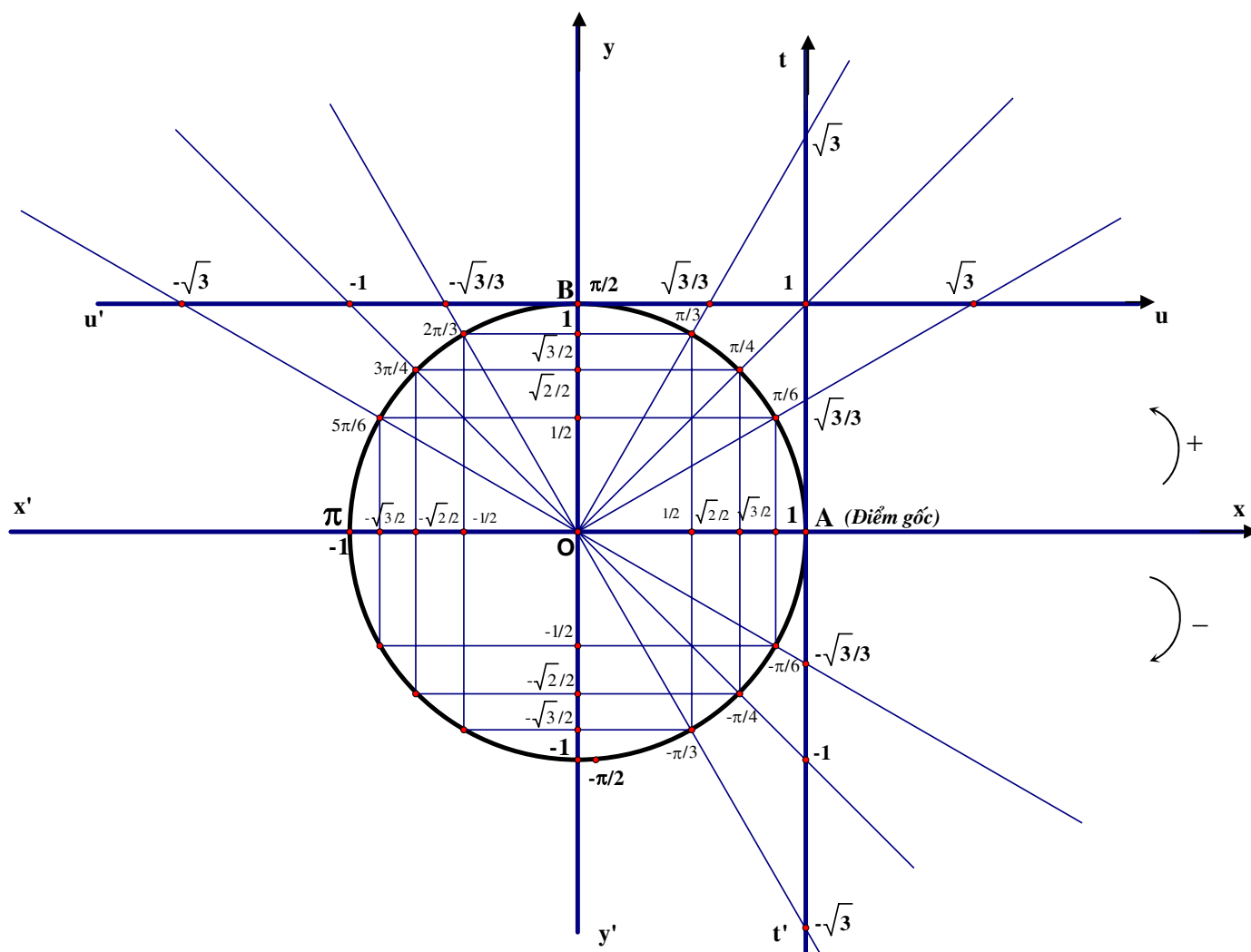
- Với mọi α ta có :
 $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ hay $|\sin \alpha| \leq 1$
 $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ hay $|\cos \alpha| \leq 1$
- $\operatorname{tg} \alpha$ xác định $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\operatorname{cotg} \alpha$ xác định $\forall \alpha \neq k\pi$

c. Tính tuần hoàn

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{cotg} \alpha\end{aligned} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

IV. Giá trị các hàm số lượng giác của các cung (góc) đặc biệt:

Ta nên sử dụng đường tròn lượng giác để ghi nhớ các giá trị đặc biệt



Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
Hslg	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

V. Hàm số lượng giác của các cung (góc) có liên quan đặc biệt:

Đó là các cung :

1. Cung đối nhau : α và $-\alpha$ (tổng bằng 0) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $-\frac{\pi}{6}$, ...)

2. Cung bù nhau : α và $\pi - \alpha$ (tổng bằng π) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{5\pi}{6}$, ...)

3. Cung phụ nhau : α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (tổng bằng $\frac{\pi}{2}$) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{\pi}{3}$, ...)

4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{2\pi}{3}$, ...)

5. Cung hơn kém π : α và $\pi + \alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{7\pi}{6}$, ...)

1. Cung đối nhau:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{cot} g(-\alpha) = -\operatorname{cot} g \alpha$$

Đối cos

Bù sin

2. Cung bù nhau :

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{cot} g(\pi - \alpha) = -\operatorname{cot} g \alpha$$

3. Cung phụ nhau :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cot} g \alpha$$

$$\operatorname{cot} g\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

Phụ chéo

Hơn kém $\frac{\pi}{2}$

sin bằng cos

cos bằng trừ sin

4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cot} g \alpha$$

$$\operatorname{cot} g\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

5. Cung hơn kém π :

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{cot} g(\pi + \alpha) = \operatorname{cot} g \alpha$$

Hơn kém π

tang, cotang

Ví dụ 1: Tính $\cos(-\frac{11\pi}{4})$, $\operatorname{tg} \frac{21\pi}{4}$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức: $A = \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

VI. Công thức lượng giác:

1. Các hệ thức cơ bản:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

$$1. \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$2. \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

2. Công thức cộng :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

$$1. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$$

$$2. \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

3. Công thức nhân đôi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

4 Công thức nhân ba:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos \alpha}{4}$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

5. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

6. Công thức tính $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ theo $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng :

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Ví dụ:

1. Biến đổi thành tổng biểu thức: $A = \cos 5x \cdot \cos 3x$

2. Tính giá trị của biểu thức: $B = \cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$

8. Công thức biến đổi tổng thành tích :

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Ví dụ: Biến đổi thành tích biểu thức: $A = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

9. Các công thức thường dùng khác:

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}$$

$$\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = \frac{5 + 3\cos 4\alpha}{8}$$

B. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Các bước giải một phương trình lượng giác

Bước 1: Tìm điều kiện (nếu có) của ẩn số để hai vế của pt có nghĩa

Bước 2: Sử dụng các phép **biến đổi tương đương** để biến đổi pt đến một pt **đã biết cách giải**

Bước 3: Giải pt và chọn nghiệm phù hợp (nếu có)

Bước 4: Kết luận

I. Định lý cơ bản: (Quan trọng)

$$\begin{aligned} \sin u = \sin v & \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} \\ \cos u = \cos v & \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} \\ \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v & \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (u, v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ \operatorname{cotg} u = \operatorname{cotg} v & \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (u, v \neq k\pi) \end{aligned}$$

(u; v là các biểu thức chứa ẩn và $k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ: Giải phương trình:

$$1. \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$2. \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$3. \cos 3x = \sin 2x$$

$$4. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}(3 - \cos 6x)$$

II. Các phương trình lượng giác cơ bản:

1. Dạng 1: $\sin x = m$; $\cos x = m$; $\operatorname{tg} x = m$; $\operatorname{cotg} x = m$ ($\forall m \in \mathbb{R}$)

*** Gpt : $\sin x = m$ (1)**

- Nếu $|m| > 1$ thì pt(1) vô nghiệm
- Nếu $|m| \leq 1$ thì ta đặt $m = \sin \alpha$ và ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = (\pi - \alpha) + k2\pi \end{cases}$$

*** Gpt : $\cos x = m$ (2)**

- Nếu $|m| > 1$ thì pt(2) vô nghiệm
- Nếu $|m| \leq 1$ thì ta đặt $m = \cos \beta$ và ta có

$$(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + k2\pi \\ x = -\beta + k2\pi \end{cases}$$

* **Gpt: $\operatorname{tg} x = m$ (3)** (pt luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$)

- Đặt $m = \operatorname{tg} \gamma$ thì
(3) $\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \gamma \Leftrightarrow x = \gamma + k\pi$

* **Gpt: $\operatorname{cotg} x = m$ (4)** (pt luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$)

- Đặt $m = \operatorname{cotg} \delta$ thì
(4) $\Leftrightarrow \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \delta \Leftrightarrow x = \delta + k\pi$

Các trường hợp đặc biệt:

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$
$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$
$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

Ví dụ:

1) Giải các phương trình :

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

b) $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} = 0$

d) $2\cos(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} = 0$

e) $\sin 2x + \cos 2x = 1$

f) $\cos^4 x + \sin^4 x = \cos 2x$

2) Giải các phương trình:

a) $1 + \cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos 2x$

c) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin 4x - 2 = 0$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos 4x$

d) $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$

e) $\cot gx + \sin x(1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}) = 4$

2. Dạng 2:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

$$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$$

($a \neq 0$)

Cách giải:

Đặt ẩn phụ : $t = \sin x$ ($t = \cos x$; $t = \tan x$; $t = \cot x$)

Ta được phương trình : $at^2 + bt + c = 0$ (1)

Giải phương trình (1) tìm t , rồi suy ra x

Chú ý : Phải đặt điều kiện thích hợp cho ẩn phụ (nếu có)

Ví dụ :

a) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$

b) $\cos 2x - 4 \cos x + \frac{5}{2} = 0$

c) $2 \sin^2 x = 4 + 5 \cos x$

d) $2 \cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

e) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$

f) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$

g) $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin x$

h) $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cdot \cos x = 0$

k) $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$

l) $5(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x}) = \cos 2x + 3$

3. Dạng 3:

$$a \cos x + b \sin x = c \quad (1)$$

($a; b \neq 0$)

Cách giải:

- Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ thì pt

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

- Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$ và $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$ với $\alpha \in [0; 2\pi)$ thì :

$$(2) \Leftrightarrow \cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

Pt (3) có dạng 1. Giải pt (3) tìm x .

Chú ý :

$$\text{Pt } a \cos x + b \sin x = c \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$$

Ví dụ : Giải các phương trình :

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1$

b) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$

c) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$

d) $\tan x - \sqrt{3} = \frac{1}{\cos x}$

e) $\frac{\cos x - \sin 2x}{2 \cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$

d. Dạng 4:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad (a; c \neq 0) \quad (1)$$

Cách giải 1:

$$\text{Áp dụng công thức hạ bậc : } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ và } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\text{và công thức nhân đôi : } \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ thay vào (1) ta sẽ biến đổi pt (1) về dạng 3}$$

Cách giải 2: (Quy về pt theo tang hoặc cotang)

Chia hai vế của pt (1) cho $\cos^2 x$ ta được pt:

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

Đây là pt dạng 2 đã biết cách giải

Chú ý: Trước khi chia phải kiểm tra xem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có phải là nghiệm của (1) không?

Ví dụ : Giải phương trình:

$$\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$$

d. Dạng 5:

$$a(\cos x + \sin x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0 \quad (1)$$

Cách giải :

- Đặt $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\text{Do } (\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

- Thay vào (1) ta được phương trình :

$$at + b \frac{t^2 - 1}{2} + c = 0 \quad (2)$$

- Giải (2) tìm t. Chọn t thỏa điều kiện rồi giải pt: $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = t$ tìm x.

Ví dụ : Giải phương trình :

$$\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0$$

Chú ý : Ta giải tương tự cho pt có dạng :

$$a(\cos x - \sin x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$$

Ví dụ : Giải phương trình :

$$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = 4$$

4. Các phương pháp giải phương trình lượng giác thường sử dụng :

a. **Phương pháp 1:** Biến đổi pt đã cho về một trong các dạng pt lượng giác cơ bản đã biết

Ví dụ: Giải phương trình:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x - \frac{3}{2} = 0$$

b. **Phương pháp 2:** Biến đổi pt đã cho về dạng tích số

Cơ sở của phương pháp là dựa vào các định lý sau đây:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad A.B.C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

Ví dụ : Giải các phương trình :

a. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

b. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

c. $2 \sin^3 x + \cos 2x - \cos x = 0$

d. $\sin 2x + 2\sqrt{2} \cos x + 2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 3 = 0$

c. **Phương pháp 3:** Biến đổi pt về dạng có thể đặt ẩn số phụ

Một số dấu hiệu nhận biết :

* Phương trình chứa cùng một hàm số lượng giác (cùng cung khác lũy thừa)

Ví dụ : Giải các phương trình :

a. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

b. $4 \cos^3 x - \cos 2x - 4 \cos x + 1 = 0$

c. $2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$

d. $\sin^4 x + \cos^2 2x = 2$

* Phương trình có chứa $(\cos x \pm \sin x)$ và $\sin x \cdot \cos x$

Ví dụ : Giải phương trình : a. $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

b. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

DẠNG 1: Giải phương trình lượng giác

Sử dụng 1 trong 3 phương pháp sau

- Biến đổi phương trình về dạng phương trình lượng giác cơ bản
- Biến đổi phương trình về dạng phương trình tích số
- Biến đổi phương trình về dạng có thể đặt ẩn số phụ chuyển về phương trình đại số

Bài 1: Giải các phương trình lượng giác sau

$$\begin{aligned} 1) \sin 2x + 2\sqrt{2} \cos x + 2\sin(x + \frac{\pi}{4}) + 3 &= 0 & 2) \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} + \sin 2x \cos 7x &= 0 \\ 3) \cos^2(x + \frac{\pi}{2}) + \cos^2(2x + \frac{\pi}{2}) + \cos^2(3x - \frac{\pi}{2}) &= \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ 4) \frac{\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}}{\sin 2x} &= \frac{1 + \sin 2x}{2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4})} & 5) \cos 7x + \sin 8x &= \cos 3x - \sin 2x \\ 6) 2 \sin x + \cos x &= \sin 2x + 1 \end{aligned}$$

Bài 2: Giải các phương trình lượng giác sau

$$\begin{aligned} 1. 2 \sin^3 x + \cos 2x + \cos x &= 0 & 8. \sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} &= 0 \\ 2. \sin x \cdot \cos 4x - \sin^2 2x &= 4 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) - \frac{7}{2} & 9. \frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} &= 2(1 + \sin x) \\ 3. 9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x &= 8 & 10. \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x &= \frac{1}{3} \cos x \cdot \sin 3x \\ 4. \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5 \sin 2x} &= \frac{1}{2} \cot g 2x - \frac{1}{8 \sin 2x} & 11. 2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 &= \frac{1}{\cos x} \\ 5. \operatorname{tg}^4 x + 1 &= \frac{(2 - \sin^2 2x) \sin 3x}{\cos^4 x} & 12. \cot gx - 1 &= \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x \\ 6. 3 - \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 2 \sin x) + 6 \cos x &= 0 & 13. \cot gx - \operatorname{tg} x + 4 \sin 2x &= \frac{2}{\sin 2x} \\ 7. \cos 2x + \cos x \cdot (2 \operatorname{tg}^2 x - 1) &= 2 & 14. \operatorname{tg} x + \cos x - \cos^2 x &= \sin x \cdot (1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

DẠNG 2: Phương trình lượng giác có chứa tham số

Sử dụng phương pháp sau

- Chọn ẩn phụ thích hợp và tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ vừa chọn (tùy thuộc vào x)
- Chuyển phương trình về phương trình đại số
- Lập luận để chuyển bài toán đã cho theo ẩn phụ vừa chọn
- Sử dụng phương pháp giải tích hoặc đại số để tìm tham số theo yêu cầu của đề bài

Bài 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x + m = 0$$

Bài 2: Định m để phương trình : $\sin x + \cos x + 1 + \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \cot gx + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}) = m$

có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài 3: Cho hàm số: $2\left(\frac{4}{\cos^2 x} + \cos^2 x\right) + m\left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right) = 1$

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 4: Cho phương trình: $\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.

Bài 5: Xác định m để phương trình:

$$2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2 \sin 2x - m = 0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài 6: Cho phương trình: $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) = m \quad (1)$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

Bài 7: Tìm m để phương trình: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m$ có nghiệm.

Bài 8: Cho phương trình $\cos 4x + 6 \sin x \cos x - m = 0$

Định m để phương trình có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Bài 9: Tìm m để phương trình: $2 \cos 2x + (\sin x \cdot \cos x - m)(\sin x + \cos x) = 0$

có nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài 10: Cho phương trình: $\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = m \tan x$

Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm

Bài 11: Cho phương trình: $\sin^4 x + (\sin x - 1)^4 = m$

Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm

Bài 12: Tìm m để phương trình: $2 + 2 \sin 2x = m(1 + \cos x)^2$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

-----Hết-----